EXERCITATIO ACADEMICA IN ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS AB...

Gioacchino Maio

EXERCITATIO ACADEMICA
IN ELEMENTA
GEOMETRIÆ PLANÆ EUCLIDIS

AB AUDITORIBUS ALMI COLLEGII NEAPOLITANI

D. THOMÆ AQUINATIS

ALANO MAC-DONALDO
JACOBO FERRARO
ANGELO DE ANCORA
MICHAELE ANGELO CONTI
JOANNE BAPTISTA BROGGIA
ANTONIO DE ANCORA

Pridie idus sextilis anni 1757.

IBIDEM

PUBLICE INSTITUENDA

ADSIDENTE

FRATRE JOACHIMO MAJO

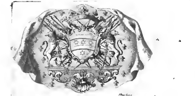
Sacræ Theologiæ Baccalaureo, & Matheseos, Linguarum Orientalium, Artisque Oratoriæ Antecessore.

NEAPOLI Ex Typographia Simoniana MDCCLVII
Auctoritate Publica.

Τοῦ ἀεὶ ὄντος, ἡ γεωμετρικὴ, γνῶσις ἐστιν. Ἑλκὸν ἄρα πρὸς ἀλήθειαν ψυχῆς εἴη ἄν, καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας, πρὸς τὸ ἄνω σχεῖν, ἃ νῦν κάτω (οὐ δέον) ἔχομεν.

Geometria ejus, quod est semper, cognitio est. Attollet igitur ad veritatem animum, atque ita ad philosophandum præparabit cogitationem, ut ad supera convertamus, quæ nunc (contra quam decet) ad inferiora dejicimus.

Plato Dial. 7. de Republ.



MICHAELI REGIO BRANCIFORTIO
INSIGNIVM ORDINVM
AVREI VELLERIS DIVI IANVARIJ
ET SACRAE MILITIAE HIEROSOLYMITANAE
EQVITI SVMMO
PRAEFECTVRAE DIVI IOANNIS AD MARE
BALLIVIO PRAETORI
BENEFICIORVM EQVESTRIVM
CALATRAVAE DIVI IACOBI AC MARTINI ALIORVMQVE
COMMENDATORI AMPLISSIMO
VTRIVSQVE SICILIAE REGIS
EX SANCTIORIS AMPLIORISQVE CONSILII
SENATORIBVS
EIVSDEM
TRIREMIVM TOTIVSQVE REI MARITIMAE
PRAEPOSITO

RE-

REGVM
CVM HISPANI TVM NEAPOLITANI
CVBICVLARIO INCLYTO
HIS CETERISQVE TITVLIS MAGNO
AT VIRTVTE SAPIENTIA FAMA
PRAECIPVE
CLEMENTIA MAGNANIMITATE PRVDENTIA
DIFFICILLIMIS TEMPORIBVS
PROBATIS
EGREGIISQVE FACINORIBVS
PRO REGE PRO REPVBLICA PRO POPVLO GESTIS
VERE MAXIMO
ALANVS MAC-DONALDVS
IN CLASSIBVS
VEXILLIS CVSTODIENDIS ADDICTVS
EIVS
DEVINCTISSIMVS CLIENS
QVAS NEAPOLI IN ALMO LYCEO
DIVI THOMAE AQVINATIS
AVSPICE
FRATRE IOACHIMO MAIO
MATHESEOS ELOQVENTIAE
GRAECARVM HEBRAEARVMQVE LITTERARVM
PROFESSORE
ASSECLIS ADIVNCTVS
PALAM EXHIBET DEMONSTRANDAS
GEOMETRIAE PLANAE PROPOSITIONES
BENEFICENTISSIMO AC PERPETVO
SVI
ANTISTITI TVTELARIQVE
IN OBSEQVENTIS ANIMI
MONVMENTVM

PROŒMIUM.

GEOMETRIÆ, *vel potius scientiarum omnium Elementa, Viri amplissimi, quibus aptitudine illa mentis nostræ, qua ex re una in alteram gradatim ascendere, ab ipsa accepimus natura, veluti ex simplicissimis rerum nascendarum seminibus ad altissimas, & abditissimas veritates adsurgit animus, tanti ad scientias quaslibet, artesque comparandas experientia docuit valere, ut iis deficientibus, nec digitum quidem proficere quemlibet in litterarum Republica, nec veritatem exquirere posse, sed densioris ignaviæ caligine quaquaversus perfundi, quovis tempore, & loco experta semper fuerit omnis ætas. Id tam palam fuit omnibus retro sæculis, ut prisca gens mortalium summo satagerit semper conatu viridem florentemque juventam nonnisi scientiarum primordiis, & elementis primum addicere; ut queat eam dein feliciter in studiorum campum pedetentim ducere; quod & Pythagoram præ ceteris triplici sua conscripto elementorum Commentario* instituivo *nempe pro pueris*, civili *pro juvenibus*, & naturali *pro viris, egisse commemorat Laertius* (a); *unde prima isthæc elementa* mathemata, *seu disciplinæ universo Græcorum ore nuncupata fuere; indeque Horatius cecinit* (b):

.....ut pueris olim dant crustula blandi
Doctores, elementa velint, ut discere prima.

Qua-

(a) *Laert. in vita Pythag. & Gillius lib. 1. cap. 9.*
(b) *Horat. lib. 1. sat. 1. v. 25.*

Quare hoc capite priscis illis temporibus in duobus unice versabantur homines, qui litteris sedulam navabant operam mathematicis *nempe, aut elementaribus disciplinis,* & philosophicis *, seu rebus civilibus, & naturalibus. Priores a peritioribus Magistris teneræ instillabantur ætati; posteriores vero provectiorum in recessibus contemplationem exercebant: illæ animos ad omnem muniebant scientiam, viamque parabant, istæ animum jam defæcatum, & promtum ad abditissima quaque perscrutanda evehebant; hocce sagaci, prudentique ductu ad summa rerum fastigia Viri trahebantur sapientes. Eadem quoque experientia duce, hoc nostro ævo quanta qualiaque in facultatibus quibusvis comparandis sint Elementorum, disciplinarumque momenta, quis non dignovit? Profecto, ut corpora, quæ continua vicissitudine oriuntur, & intereunt ex minimis exilibusve egredi videntur initiis, ita stabiles sempiternæque res, quibus nobilissimæ quaque facultates continentur, tenuissimis super elementis inniti quotidie experimur: & uti animadvertente Tullio, ex fici vel minimo granulo, aut ex vitis tenuissimo acino, aut ex cæterorum frugum, aut stirpium seminibus minutissimis immensos truncos, ramosque procreari cernimus, ita ex minimis hisce dictu, audituque perexiguis elementorum initiis ingentem, infinitamque problematum, theorematum, & propositionum quarumcunque, omnem seu artem, seu scientiam spectantium, comperimus exortes molem: imo ex iis duntaxat, omnem philosophandi rationem, ratiocinandi methodum, rerum harmoniam, omniaque seu instrumenta, seu utillima artefacta ad res quoscumque vel intimius dignoscendas, vel utilius tractandas tamquam unico ex fonte accepimus. Serio igitur prudentique consilio, quemadmodum Majores nostri, ita & hujus ævi sapientiores Viri post Euclidem ducem Elementa isthæc & profunde*

per-

perscrutari, & medullitus explorare ad utilem, solidam, diligentemque Juventutis eruditionem pro aris studuerunt, & focis. Qua de re quis laudibus non ad æthera extollet hoc nostrum magni nominis almum Lyceum, in quo dum diligenti cura solidiores instillantur ob Reipublicæ augmentum, Juventutisque profectum omnes cum theologicæ, tum philosophicæ facultates, eodem ictu, et tempore, Adolescentes ad prima rerum omnium addicuntur & applicantur Geometrica Elementa · ut iis, veluti clavi quadam quisque nostrum sibi valeat aperire januas ad scientiarum omnium maximo cum incremento adripiendum iter? Eapropter nos, qui ejusmodi pacto instructi proxime elapso anno iisdem Elementis, qua potuimus, omnem navavimus operam secundum captus nostri, imbecillisque ætatis indolem, & experientia comperimus brevi in ipsis quemlibet nostrum complevisse tempora multa; dum nostris Magistris ad rectam institutionem nostram omnem moventibus lapidem gratias rependimus summas, hic de iisdem Elementis periculum facere, in vestro amplissimo conspectu satagimus · ut inde Vobis nostram operam probantibus & fructum, majori potiorique conatu ad reliqua valeamus admovere animum, & vires. Eja benigno excipite corde, quæ hic sciscitantibus Vobis in medium proferre contendimus, & dum imbecillitas nostra, incultusque sermo tædio forsan Vobis, & molestiæ erit, animum saltem nostrum, studiumque solidis hisce in Scientiis proficiendi ut adprobetis, exoramus.

PLANORUM ELEMENTA

ORDINE NATURALI DIGESTA.

GEOMETRIA a terræ dimensione olim nuncupata (1), quoad nomen est terræ mensura, quoad rem vero latius ejus natura patet: est enim ea matheseos pars, quæ utpote ceterarum fundamentum, & basis, quantitatem omnem generatim in longum, latum, & altum extensam contemplatur. Hujusmodi autem dimensiones, non prout in re simul conjunctæ reperiuntur, sed ut a mente seorsim concipi valent, considerat, & perinde quantitatem ipsam in lineas, superficies, & solida digerit: potissimum tamen ipsa, ut ait Proclus, in contemplatione versatur figurarum, quæ aut lineis, aut superficiebus continentur, & in planis dumtaxat, sive solidis consistunt, quare in *Planam*, & *Solidam*, seu, ut ajunt, in *Planometriam*, & *Stereometriam* dispescitur. Nobis igitur per hujusmodi Exercitia de *Planis* tantum, quæ prioribus sex libris complexus est Euclides, edisserendum occurrit.

EX PRIMO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I. QUas in primo libro exhibet Euclides propositiones numero sunt quadraginta octo: quarum triginta quatuor sunt theoremata, quibus rectilineorum affectiones demonstrat, & quatuordecim sunt problemata, quibus eorumdem constructiones exponit, quæ omnes pro rectilinearum figurarum doctrina enucleanda, sunt institutæ, & ad tres classes facili negotio commode redigi possunt, nimirum & ad lineas rectas, & ad triangula, & ad parallelogramma, sive figuras quadrilateras, quæ lineis rectis, & parallelis continentur. Quemadmodum ergo theoremata, & problemata seorsim exponere lubet, ita secundum præfatas hasce classes ea digerere conabimur.

[1] A terræ dimensione Γεωμετρία dicta est, quasi terræ mensura, vel ars ipsa terram dimetiendi e voce Græca γαῖα, aut γῆ, terra, & μετρέω, seu μετρῶ metior. Caussam nominis probat, quod a terræ dimensione ars hæc cœperit; ut scribit Cic. 4. Acad. eorum teste Servio ad 3. Eclog. & Proclo, talis disciplinæ inventa fuit, quum Nilus æquo plus crescens, confudisset terminos possessionum, ad quos invenendos Ægyptii Philosophi lineis agros diviserunt.

PRIMI LIBRI THEOREMATA

DE LINEIS RECTIS.

II. Lineas rectas considerat Euclides, vel ut sibi mutuo occurrentes, & angulum constituentes, vel ut inter se parallelas, & numquam convenientes. Circa primas quatuor occurrunt Euclidis theoremata, nimirum I. Ad eamdem rectam lineam, duabus eisdem rectis lineis, non constituentur duæ aliæ rectæ lineæ æquales altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eamdem partem, eosdem, quos primæ rectæ lineæ terminos habentes (1). II. Quum recta linea insistens super alia recta linea angulos deinceps fecerit, eos vel rectos, vel duobus rectis æquales efficiet (2). III. Si ex puncto unius rectæ lineæ ducantur ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ constituant cum illa angulos deinceps duobus rectis æquales, in directum erunt illæ duæ rectæ lineæ (3). IV. Si duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, angulos, quos ad verticem faciunt, inter se æquales erunt (4). Huic propositioni addi potest ejus conversa, quæ sic exhibetur. Si ex puncto in recta linea dato ducantur hinc inde ad partes oppositas duæ aliæ rectæ lineæ, quæ efficiant angulos ad verticem æquales, illæ duæ rectæ lineæ erunt in directum (5).

III. Circa theoriam parallelarum quinque ab Euclide demonstrantur theoremata, nempe I. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes tertia incidat recta linea, & efficiat angulos alternos æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ (6). II. Si in duas rectas lineas in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, & efficiat vel angulum exteriorem æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem

vel

(1) Prop. 7 lib. 1 Euclides teste Proclo, recepit theorema hoc, ut esset lemma octavæ propositioni, non tamen ad plura summ utilitatem extendit, nullum qui alium usum apud Geometras haber

(2) Prop. 13 lib. 1 Hoc theorema ab Euclide fuit perculsum, quo teste Proclo, maximam suos diligentiam adhibuit. eventu per illud & exposuit modum, quo recta una super altera insistens debeat, nempe non in directum, sed ad angulum, & indicavit, quod angulus unus semper duobus rectis sit minor, alias non esset angulus, sed una recta

(3) Prop. 14. lib. 1. Hoc theorema Euclides tradit ad inveniendam præcedentem, & per impossibili utrique repugnans demonstrat; conversa enim theorematum per impossibilia ostendi debent, ut sequit Proclus.

(4) Prop. 15 lib. 1 Theorema istud, teste Eudemo, a Thalete Milesio fuit primum repertum, & ab Euclide deinde demonstratum, qua etiam demonstratione tenuit, si plures rectæ sesi mutuo secent, has efficere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

(5) Corollarium est 15 Propositionis

(6) Prop. 27 lib. 1 In hoc theoremate Euclides alternos angulos appellat eos, qui neque ad eamdem partem, ut qui deinceps sunt; sed ab incidente, quæ utrique istarum parallelas excitat, distinguuntur, & differunt, quod alter sursum, alter deorsum ponatur.

vel duos angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis æquales, parallelæ erunt duæ illæ rectæ lineæ. Istæ duæ propositiones exhibent tres conditiones, quibus parallelismus rectarum dignoscitur (1). III Si in duas rectas lineas parallelas tertia incidat recta linea, hæc efficiet & angulos alternos æquales, & angulum externum æqualem interiori, & opposito ad eamdem partem & duos angulos internos ad eamdem partem positos duobus rectis æquales. Propositio ista utramque precedentem convertit, & proprietates parallelarum exponit (2). IV Quæ eidem sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ (3). V. Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectas lineas, inter se sunt etiam æquales, & parallelæ (4).

DE TRIANGULIS.

IV. Considerat Euclides triangula & quoad se inspecta, & inter se collata, hoc est demonstrat proprietates eum absolutas, tum relativas triangulorum. Quoad proprietates absolutas & investigat illas, quæ sunt omnium triangulorum communes, & illas, quæ sunt quorumdam triangulorum peculiares omnia isthæc sigillatim exponere curabimus.

DE TRIAGULIS QVOAD SE INSPECTIS, SIVE DE PROPRIETATIBUS ABSOLUTIS TRIANGULORUM CUM COMMUNIBUS, TUM PECULIARIBUS.

V. Universales, & communes triangulorum proprietates quinque sunt, quæ hisce theorematibus exhibentur I In omni triangulo, uno latere producto, exterior angulus est major alterutro interiore & opposito (5) II Omnis trianguli duo anguli simul duobus rectis minores sunt quomodocumque sumti (6). III. Cujuscumque trianguli

 uno

[1] Prop. 28. lib. 1 Hoc theorema repertum fuit ab Euclide, tamen a Ptolemæo alia via demonstratur, teste Proclo.

[2] Prop. 29. lib. 1. Theorema isto Euclides, ut inquit Proclus, utramque precedentem convertit, quod enim in utraque illa est quæsitum, in hac positionem facit & quæ in illis data fuere, demonstrare proponit.

[3] Prop. 30. lib. 1. Euclidis est hoc theorema qui explicat respectum parallelarum, qui in æqualitas non semper contingit, non enim, quæ ejusdem sunt dupla, inter se sunt dupla, ut inquit Proclus.

[4] Prop. 33. lib. 1. Consensum parallelarû est theorema istud: unde per ipsum parallelogrammorum ortum latenter tradit Euclides, parallelogrammum enim fit ab æqualibus, & parallelis.

[5] Ex lib. 1 prop. 16. quam reperit Euclides.

[6] Ex lib. 1. prop. 17. est Euclidis, qui per hoc theorema, ut inquit Proclus, indeterminate demonstrat, duos quoslibet trianguli angulos duobus rectis minores esse, at in propositione 32. determinabitur, quanto sint minores, nempe reliquo trianguli angulo. Tres enim ipsius anguli duobus rectis æquales sunt: quare duo tanto minores erunt duobus rectis, quantus est reliquus angulus.

uno latere producto, angulus exterior est æqualis duobus interioribus, & oppositis simul sumtis: & anguli omnes simul duobus rectis sunt æquales (1). IV. In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo quomodocumque sumta (2). V. Si ex terminis unius lateris trianguli ducantur intra triangulum duæ rectæ lineæ, eæ simul minores erunt duobus aliis lateribus trianguli, angulum vero majorem continebunt (3).

VI. Affectiones peculiares quorumdam triangulorum juxta Euclidem egrediuntur aut ex lateribus, aut ex angulis dati trianguli: priores hæc quatuor theoremata exhibent, nimirum. I. Isoscelium triangulorum anguli ad basim sunt inter se æquales: & productis æqualibus lateribus anguli infra basim etiam inter se æquales erunt. Hinc venit triangula æquilatera esse etiam æquiangula (4). II. Si trianguli duo anguli æquales fuerint, & latera eos angulos subtendentia pariter æqualia erunt. Hæc propositio convertit antecedentem, & perinde colligere proinde est, triangulum æquiangulum esse etiam æquilaterum (5). III. Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit. Hinc eruere licet, triangulum scalenum, quod cuncta latera inæqualia habet, omnes etiam angulos habere pariter inæquales (6). IV. In omni vicissim triangulo majori angulo majus latus opponitur. Hæc propositio est conversa præcedentis, & ex illa per contrarium patet, si omnes anguli trianguli sint inæquales, triangulum esse scalenum (7).

VII. Ejusmodi sunt proprietates cujuslibet trianguli quoad latera inspecti, quoad angulos vero Euclides in primo libro solum demonstrat celebrem proprietatem trianguli rectanguli, demonstraturus in 2. lib. affectiones trianguli obtusanguli, & acutanguli: hoc autem per duo theoremata complet. I. In triangulis rectangulis quadratum quod

fit

[1] Prop. 32. lib. 1. Hujus theorematis ortum Pythagoræ adscribit Eudemus, ut Proclus tradit, qui etiam notat ex hoc theoremate indicari, quantum angulus externus trianguli sit major utroque interiore, & opposito, semper reliquo, & quantum duo quilibet anguli trianguli duobus rectis sint minores, nempe uno. Unde hoc theorema complectitur doctrinam propositionum 16 & 17, & ex hoc etiam aperitur via ad reperiendum, quantum rectilineorum anguli quot rectis sint æquales: omnis enim figura rectilinea in triangula resolvitur.

[2] Prop. 20. lib. 1. Hoc theorema ab Euclide demonstratum, ut scribit Proclus, Epicurei vero illud valde irridere consueverunt, & ipsa tam manifestum esse dicebant, ut probatione non egeret, at non animadverterunt, quod esto sensu sit notum, scientiam tamen numquam gignere posset, nisi fuisset demonstratione firmatum.

[3] Ex lib. 1. prop. 21. Euclidis.

[4] Prop. 5. lib. 1. Thales Milesius hoc theorema reperit teste Proclo: is enim primus animadvertit quorumvis isoscelium angulos ad basim esse æquales, & more antiquorum similes appellavit.

[5] Ex lib. 1. prop. 6. Euclides hoc theoremate convertit præcedentem ad inficiendum in triangulis quibusvis latera, & angulos mutuo sibi invicem respondere.

(6) Ex Lib. 1. prop. 18 Euclidis.

(7) Ex Lib. 1. prop. 19. Euclidis, qua convertit præcedentem ad connectendum in triangulis & latera & angulos æquo, parique incedere gressu.

sit ex latere rectum angulum subtendente (quod graece dicitur *hypotenusa*) aequale est quadratis laterum rectum angulum continentium (quae graece *catheta* nuncupantur) (1). II Si quadratum ex uno latere trianguli aequale sit quadratis, quae ex aliis lateribus fiunt, angulus sub his lateribus contentus, rectus erit (2).

DE TRIANGULIS INVICEM COLLATIS, HOC EST DE PROPRIETATIBUS RELATIVIS EORUMDEM.

VIII. Comparat Euclides triangula inter se ad inferendam eorumdam aut aequalitatem, aut inaequalitatem, aut tantummodo aliquorum aequalitatem quoad aream, sive spatium: ejus theoremata, quibus hasce triangulorum relativas proprietates demonstrat, sunt quinque, videlicet. I. Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, & angulos sub iis lateribus contentos aequales, habebunt & basim basi aequalem, erunt reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur, eritque triangulum aequale triangulo (3). II. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus aequalia alterum alteri, & basim basi aequalem, & angulos sub aequalibus lateribus contentos pariter aequales habebunt: haec propositio convertit quartam (4). III. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus aequalia alterum alteri, & angulum sub iis lateribus contentum angulo majorem, & basim basi majorem pariter habebunt (5). IV. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus aequalia alterum alteri, & basim basi majorem, habebunt & angulum sub iis lateribus contentum angulo majorem: hoc theorema est conversum praecedentis (6). V. Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis aequalis alterum alteri, & unum latus uni lateri aequa-

(1) Prop. 47. lib. 1. Theorema illud teste Laertio, & Proclo, Pythagorae ortum debet, qui, ut ex Apollodoro apud eumdem Laertium, ob ejus inventionem ita laetitia fuit affectus, ut Hecatomben, hoc est, sacrificium centum boum Diis immolaverit.

(2) Prop. 48. lib. 1. Pythagorae etiam adscribitur theorema illud, quod praecedens ex toto invertit.

(3) Prop. 4. lib. 1. Hoc theorema Euclides reperit, qui in eo demonstrando utitur superpositione, quae maxime usitata est apud Mathematicos, & Archimedes eam usurpavit non solum in libro de centro gravitatis planorum, sed etiam in solidis, ut de Conoidibus, & de Sphaeroidibus, &c.

(4) Prop. 8. lib. 1. quae ad Euclidem refertur.

(5) Prop. 24. lib. 1. Hanc propositionem Euclides opponit quartae. Per illam enim angulos, qui sunt ad vertices triangulorum aequales posuit, per hanc vero inaequales: per illam bases aequales demonstrat, per hanc inaequales.

(6) Prop. 25. lib. 1. Per hoc theorema Euclides ipsa & opposita octavam propositionem demonstrat, & praecedentem convertit, quae diversis modis ab aliis demonstratur, ut tradit Proclus.

æquale, sive quod æqualibus adjacet angulis, sive quod uni æqualium angulorum opponitur, omnia reliqua etiam æqualia habebunt: hæc propositio quoad primam partem convertit quartam (1). His propositionibus nova alia addi potest, quæ complet perfectam æqualitatem triangulorum, estque sequens: Si duo triangula habeant unum angulum uni angulo æqualem, & circa reliquos angulos duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquos angulos ejusdem speciei, hoc est, vel utrumque acutum, vel utrumque obtusum &c. omnia reliqua æqualia habebunt.

IX. Theoremata, ex quibus Euclides deducit æqualitatem areæ, sive spatii triangulorum sunt quatuor sequentia, videlicet. I. Triangula in eadem basi, & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia (2). II. Triangula in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia (3). Ambæ, quæ sequuntur, sunt propositiones istarum conversæ. III. Triangula æqualia in eadem basi, & ad eamdem partem constituta, sunt etiam in eisdem parallelis (4). Triangula in æqualibus basibus, ac in directum jacentibus, ad eamdem partem constituta, sunt etiam in iisdem parallelis (5).

DE PARALLELOGRAMMIS.

X. DE parallelogrammis etiam Euclides demonstrat cum adfectiones absolutas, tum eorumdem adfectiones relativas. Proprietates absolutas hæc duo theoremata ostendunt. I. Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex adverso sunt, inter se sunt æqualia: similiter autem anguli: diagonalis vero ea bifariam dividit (6). II. Parallelogrammorum spatiorum eorum, quæ circa diametrum sunt complementa, inter se sunt æqualia (7).

XI. Adfectiones parallelogrammorum relativas illas dicimus, quæ ipsa spectant tam inter se, quam cum triangulis collata: quas hæc tria Euclidis theoremata demonstrant. I. Parallelogramma in eadem

(1) Prop. 26. lib. 1. Theorema illud ad Thaletem Milesium referre auctorum, ut Proclus ex Eudemo tradit. Ista autem fa... cludes doctrinam omnem æqualitatis, & inæqualitatis triangulorum claudit, & ad parallelas, & parallelogramma pertransit.

(2) Ex lib. 1. prop. 37. Euclidis.

(3) Ex lib. 1. prop. 38. Euclidis.

(4) Ex lib. 1. prop. 39. Euclidis, quæ convertit 37.

(5) Ex lib. 1. prop. 40. Euclidis, quæ convertit 38.

(6) Ex lib. 1. prop. 34. Euclidis. Quam hic de parallelogrammis demonstrat, tertia adfectio circulo quoque convenit, & ellipsi.

(7) Ex 1. lib. prop. 43. Euclidis, qui unum tantum hujus theorematis casum exponit; etsi ipsius tres sint casus: vel enim, quæ circa diametrum sunt complementa se in puncto tangunt, vel se secant, vel a se disjunguntur. Eadem autem semper congruit demonstratio, quamquam non semper quadrilatera sint supplementa, ut docet Commandinus.

dem basi, & in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia (1). II. Parallelogramma in æqualibus basibus, & in iisdem parallelis constituta, sunt etiam inter se æqualia (2) Si parallelogrammum, & triangulum habeant eamdem basim, & sint inter easdem parallelas constituta, erit parallelogrammum duplum trianguli (3).

PROBLEMATA PRIMI LIBRI.

XII. HUjus primi libri problemata instituit Euclides ad exponendum ortus, & constructiones rectilinearum quoque figurarum: quare ipsa ad quatuor classes commode revocari possunt, nimirum & ad rectas tum quoad communem praxim, tum perpendiculares, tum parallelas, & ad angulos, & ad triangula, & ad parallelogramma tandem sive quoad se inspecta, sive inter se collata, secundum has igitur classes ea hæc proponere placet.

XIII. Praxis communis rectarum per hæc tria Euclidis problemata indicatur. I Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere (4). II Datis duabus rectis lineis inæqualibus, de majore minori portionem æqualem abscindere (5). III. Datam rectam lineam terminatam bifariam dividere (6).

XIV.

(1) Ex Lib. 1. prop. 35 Euclidis, qui per hoc, & quæ sequuntur theoremata parallelogrammi æqualiter dimensionem exposuit. Hoc theoremate, ut Federicus Commendinus ex Proclo innuit, ex eorum numero fuit, quæ in mathematicis disciplinis admirabilia appellantur. Stupet enim vulgus statim cum eadem longitudinum multiplicatam spatiorum æqualitatem non desinere, & tamen eadem manente basi, quantum parallelas producimus, tantum parallelogrammorum quoque longitudinem augemus.

(2) Ex lib 1. prop. 36. Euclidis. In præcedenti theoremate Euclides easdem bases accepit, hic vero æquales. Id enim commune utriusque parallelogrammi posuit, inter easdem esse parallelas. Hoc theorema per bases separatas demonstravit Euclides, attamen, ut inquit Proclus, a Theone demonstratum fuit ad majorem redacta formam, ut omnibus casibus congruere videatur.

(3) Ex lib 1. prop. 41 Euclidis. Hujus theorematis demonstratio etiam celer, si parallelogrammum, & triangulum habeant æquales bases, nam cum triangula in basibus æqualibus sint æqualia, parallelogrammum, quod alterius est duplum, reliqui quoque duplum erit.

(4) Ex lib. 1. prop. 2. Euclidis, qui in ipsa dedit quidem punctum situ positione, hoc enim tantum pacto dari potest, lineam etiam datam specie, & magnitudine. Sumsit quoque punctum datum extra rectam datam, cum posset esse & in eadem recta, & in ejusdem rectæ extremitate, in quo casu eadem foret demonstratio, etsi diversa constructio.

(5) Ex lib. 1. prop. 3. Euclidis.

(6) Ex lib. 1. prop. 10. Euclidis; qui rectam terminatam ponit, siquidem ex utraque parte infinitam rectam bifariam dividere non possumus, infinitam vero ex altera parte tantum, ubicumque punctum acceptum, tomquam semper foret sectio. Apollonius Pergæus rectam lineam terminatam diversa posita ab Euclide bifariam secat, quo duarum circulorum ad modum primæ propositionis, attamen in idem convenit, animadvertente Commendino.

XIV Quoad rectas perpendiculares, & parallelas hæc tria apud Euclidem extant problemata. I Ex puncto in recta linea dato perpendicularem rectam lineam excitare (1). II Super rectam infinitam ex puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam demittere (2). III Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere (3).

XV Praxim deinceps angulorum, quæ ipsos sive quoad se inspectos, sive inter se collatos spectat, hæc duo nos docent problemata. I Datum angulum rectilineum bifariam secare (4). II Ad datam rectam lineam, atque ad datum in ea punctum, angulum dato angulo rectilineo æqualem constituere (5).

XVI Triangula iisdem per hæc duo problemata construuntur. I In data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere (6). II Ex tribus rectis, quæ tribus aliis datis sint æquales triangulum constituere, oportet autem, ut ex tribus datis duæ simul reliqua majores sint, quomodocumque sumtæ (7).

XVII Tandem problemata, quæ ad parallelogramma etiam costruenda attinent, sunt hæc quatuor. I. In data recta linea terminata quadratum constituere (8). II Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo dato (9). III. Ad datam rectam li-

(1) Ex lib. 1. prop. 11 Euclidis, quipunctum in medio lineæ designat, alibi sumi etiam posse in altera ejus extremitate, quo in casu eadem afformanda esset constructio, recta tantum producta.

(2) Prop. 12. lib. 1 Hoc problema, ut refert Proclus, Oenopides primus investigavit, utile ipsum ad Astrologiam existimans & datur in eo recta infinita, cum punctum extra ipsam sumatur, ne cum linea dicta confundatur.

(3) Prop. 31 lib. 1 quæ est Euclidis; qui per illa problema ortum parallelarum videtur tradere.

(4) Ex lib. 1 Prop. 9. Euclidis Ex hoc problemate angulum rectilineum modo rectilineum secari valet, quia aliorum sectio ad elementarem institutionem non attinet; angulus autem rectilineus hac etiam secari potest in quatuor angulos æquales, in octo, in sexdecim & semper procedendo per augmentum duplex, eoquod omnis pars sectioni semper hi etiam secari potent; in quamlibet vero aliam inæqualem portionem cum secare geometram constructionem transgreditur.

(5) Prop. 23 lib. 1 Hoc problema ab Oenopide inventum fuisse tradit Eudemus.

(6) Ex lib. 1 Prop. 1 Quæ est Euclidis, qui ipso solum in ipsa modum recensuit, quo in data recta triangulum æquilaterum valeat constitui; potest tamen in ipsa recta constitui, & triangulum isosceles, si accipiatur ipsa recta vel æque major, vel æque minor, & triangulum scalenum, si non in puncto, in quo illi duo circuli se secant, sed in alio seu extra, seu intra circulorum circumferentiam quomodolibet designato recta ducatur, sic enim tria latera trianguli inæqualia oriuntur.

(7) Prop. 22 lib. 1 Hoc problema est Euclidis, attamen ejus demonstratio a Theone fuit immutata, ut animadvertit Proclus.

(8) Prop. 46. lib. 1 Problema istud Euclidas precudit, & præcipue deservit constructioni propositionis 47. lib. 1. & ad totum elementum secundum.

(9) Ex lib. 1 prop. 42. Euclidis.

lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (c). III. Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo (a).

EX SECUNDO ELEMENTORUM LIBRO.

I. PEr quatuordecim propositiones, quarum duodecim sunt theoremata, & duo tantum problemata, edisserit in hoc secundo libro Euclides de Potentiis rectarum, hoc est de quadratis, atque rectangulis omnibus, quæ ex ipsis rectis, sive ex earumdem partibus egrediuntur. Eorum doctrinam eo potissimum momento prosequitur, ut proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, quas adjicere debuerat ad propositionem quadragesimam septimam libri primi, commode demonstrare posset. Has igitur propositiones eodem superius statuto ordine proferemus.

THEOREMATA SECUNDI LIBRI.

II. QUæ cudit in hoc secundo libro theoremata Euclides, ad duas classes recta methodo redigi valent, videlicet, & ad varias rectangulorum constructiones, quæ ex diversa rectarum sectione oriuntur, & ad proprietates trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, secundum igitur has classes illa omnia proferenda ducimus.

DE RECTANGULIS, QUÆ EX VARIA RECTARUM SECTIONE ORIUNTUR.

III. PRimum hujus libri theorema tamquam fundamentum ceterorum proponit Euclides, quodque, etsi ipse demonstret, potest tamen veluti axioma accipi, & facili negotio descendit ex secunda parte octavi axiomatis libri primi, quo profertur, totum omnibus

C suis

(c) Prop. 44. lib. 1. Antiqua sunt, ut ait Eudemus, Pythagoreorum inventa hujusmodi spatiorum applicationes, excessus, & defectus: dum enim ipsi proposita recta, datum spatium toti rectæ coaptaverunt, tunc spatium illud lineæ applicari dixerunt: cum vero spatii longitudinem ipsa recta majorem effecerunt, tunc excedere: cum minorem, tunc deficere. Euclides autem istud problema applicationem parallelogrammi ad certam rectam recensuit; ac tunc deinde excessus & defectum cum in secundo, tum in sexto elemento, ut Proclus animadvertit.

(a) Prop. 45. lib. 1. Problema istud etiam est Euclidis, teste Proclo, qui per hoc problema doctrinam, quam in duobus præcedentibus tradiderat de constructione, & applicatione æqualium dato triangulo parallelogrammorum, universaliorem reddit, applicationem ad quodlibet rectilineum extendens.

suis partibus simul sumtis æquale esse, ex quo omnes veluti hujus libri propositiones clarissime descendunt, quæ de re primum heic considerat Euclides lineas sectas, & insectas, atque rectangula, quæ ex ipsis egrediuntur, invicem confert: deinceps comparat quoque rectangula, & quadrata, quæ oriuntur ex recta aut secta utcumque, aut secta in partes æquales, & inæquales, aut eadem secta in partes æquales, & utcumque protensa per aliam rectam ei adjectam: secundum igitur hunc ordinem decem prima theoremata proferemus.

IV. Circa rectas sectas, & insectas hoc unicum adest theorema. Si fuerint duæ rectæ lineæ, una quidem secta in quotcumque partes, altera vero insecta, rectangulum, quod fit ex tota, & insecta, æquale erit rectangulis, quæ fiunt ex partibus totius, & eadem insecta (1).

V. Quoad rectas sectas utcumque quinque alia sequuntur theoremata, quæ ex primo quoque descendunt, & sunt. I Si recta linea secta fuerint utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit rectangulis, quæ fiunt a tota, & partibus (2). II Si recta linea secetur utcumque, rectangulum ex tota, & parte una, æquale erit rectangulo sub partibus, una cum quadrato, quod fit ex parte prædicta (3). III Si recta linea secetur utcumque, quadratum quod fit a tota, æquale erit quadratis partium una cum rectangulo bis sub partibus contento (4). Ex hujus theorematis demonstratione duo descendunt primum, parallelogramma circa diagonalem quadrati esse quoque quadrata; secundum, quod si recta secetur in partes æquales, quadratum totius esse quadruplum quadrati dimidiæ. IV Si recta linea secetur utcumque, quadrata, quæ fiunt ex tota & parte una, æqualia erunt rectangulo bis contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (5). V. Si recta linea secetur utcumque, quadratum quod fit a tota, & parte una, veluti ex unica linea, æquale erit rectangulo quater contento sub tota, & dicta parte, una cum quadrato partis alterius (6).

VI.

[1] Prop. 1. lib. 2. Non solum hoc theorema, verum & omnia secundi elementi propositionum judicio omnium Euclidi adtribuuntur, qui eas omnes unice indicat ad demonstrandas cum obtusianguli, tum acutianguli proprietates, ob quas totum secundum conscripsit librum. Hujusmodi vero propositiones fere omnes demonstrantur axiomate illo: Totum est suis partibus simul sumtis æquale. Decem prima hujus elementi theoremata, quæ spectant rectangula, & quadrata ex linearum sectione oriunda, etiam etiam in numeris reperiuntur, quoties numeri, ut lineæ, dividuntur in partes; itemque rectangula quoque numerica ex multiplicatione duorum numerorum producuntur, & quadrata numerica ex multiplicatione numeri per se ipsum, unde de numeris idem valet, quod de lineis.

Ex hoc quoque theoremate patescit constat, in quadrati spatio parallelogramma circa diametrum, quadrata esse.

[2] Prop. 2. lib. 2.

[3] Prop. 3 lib. 2. Hoc, & duo præcedentia theoremata demonstrandæ multiplicationi plurimum deserviunt.

[4] Prop. 4. lib. 2. Hoc theorema radicum quadraticarum extractioni non parum confert.

[5] Prop. 7 lib. 2.

[6] Prop. 8. lib. 2.

VI. De rectis sectis in partes æquales, & inæquales hæc duo theoremata demonstrat Euclides. I. Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, erit rectangulum ex partibus inæqualibus, una cum quadrato portionis, quæ inter utramque sectionem intercipitur, æquale ei, quod a dimidia describitur, quadrato (1). II. Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam, quadrata partium inæqualium dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & portione inter utramque sectionem interjecta (2).

VII. Tandem de linea secta in partes æquales, & producta per adjectionem alterius hæc duo alia exhibet Euclides theoremata. I. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, erit rectangulum, quod fit ex tota, & adjecta veluti ex unica linea in ipsam adjectam, una cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato, quod fit ex dimidia, & adjecta, similiter tamquam ex unica linea (3). II. Si recta linea secetur bifariam, eique alia in directum adjiciatur, quadrata duo, unum ex tota, & adjecta veluti ex unica linea, alterum ex ipsa adjecta, dupla erunt quadratorum, quæ fiunt ex dimidia, & ea, quæ componitur ex dimidia, & adjecta (4).

DE RECTANCULIS LATERUM TRIANGULI OBTUSANGULI, ET ACUTANGULI.

VIII. In propositione 47 lib. 1 invicem comparavit Euclides quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli rectanguli: heic autem versatur circa quadrata, quæ fiunt ex lateribus trianguli cum obtusanguli, tum acutanguli, exposita jam de potentiis rectarum doctrina, quæ omnino præmittenda erat, & sequentia duo cudit theoremata. I. In triangulis obtusangulis quadratum, quod fit ex latere obtusum angulum subtendente, majus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum obtusum adjungit ei perpendicularis ex opposito angulo demissa (5). II. In triangulis acutangulis quadratum, quod fit ex latere acutum angulum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt ex lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo bis contento sub uno dictorum laterum, & portione, quam prope angulum acutum abscindit ex eo perpendicularis ex opposito angu-

C 2

[1] Prop. 5 lib. 2. Theorema illud cum tribus, quæ sequuntur, ad Algebram multum conducunt.

[2] Prop. 9. lib. 2. Quæ cum reliquis, quæ sequuntur, Trigonometriæ planæ deserviunt.

[3] Prop. 6. lib. 2.

[4] Prop. 10 lib. 2.

[5] Prop. 12 lib. 2. Ad hanc, & sequentem propositionem totum dirigitur secundum ab Euclide elementum & per hæc duo theoremata demonstrat ipse proprietates illas triangulorum, quas in primo libro reliquerat.

angulo demissa. Ex hoc theoremate tale existit corollarium. In omni parallelogrammo quadrata diagonalium æqualia sunt quadratis laterum (1)

SECUNDI LIBRI PROBLEMATA.

IX. DUo tantum sunt ejusmodi secundi libri problemata, quorum unum potentias rectarum spectat, alterum rectilineorum æqualitatem. I. Datam rectam lineam sic secare dividere, ut rectangulum, quod fit ex tota, & parte una, æquale sit quadrato partis alterius (2). II Dato rectilineo æquale quadratum constituere (3). Ex problematis hujus demonstratione duo eliciuntur corollaria. I. Si ex puncto aliquo in circuli circumferentia sumto, perpendicularis ad diametrum demittatur, quadratum talis perpendicularis æquale erit rectangulo sub diametri segmentis comprehenso. II Si quadratum, quod fit perpendiculari erecta super diametro circuli, æquale sit rectangulo, quod fit ex segmentis, circuli circumferentia transibit per extremitatem perpendicularis.

EX TERTIO ELEMENTORUM LIBRO PROPOSITIONES.

I QUamquam Euclides in tertio Elementorum Libro unam tantum contempletur figuram, circulum nempe non paucæ tamen sunt affectiones, & constructiones, quas de hujusmodi figura demonstrat: plurimas enim sive in circulo, sive ad circulum ductas rectas lineas inter se comparat; circulos etiam & se se mutuo intersecantes, & vel se invicem vel rectas ipsas tangentes considerat, centra circulorum, & portionum determinat, angulosque tandem, qui sive ad centra, sive ad circumferentias consistunt, sese inter componit, quare cum in hoc libro propositiones triginta septem occurrant, quarum una & triginta theo-

[1] Prop. 3 lib. 2. Quamquam Euclides in definitionibus lib. 1. acutangulum triangulum nuncupaverit illud, quod omnes acutos habeat angulos, hic tamen omnia triangula appellat acutangula, propterea quod omnia habeant saltem unum angulum acutum, unde propositio illa hoc pacto exponitur quoad sensum. Omnis trianguli latus, quod acutum subtendit angulum, minus potest esse, quam latera, acutum angulum continentia, quod & de triangulo rectangulo, & de obtusangulo quoque valet.

[2] Prop. 11 lib. 2. Hoc problema solâ geometricâ acumini partitioni, non autem numericæ: nullus enim numerus in duas partes secari potest, ut productum ex toto in partem unam, æquale sit quadrato partis reliquum. Hoc idem problema demonstrat Euclides in sexto libro, ubi diverso modo illud exhibet dicens: datam rectam extrema, & media ratione secare: hic autem, quoniam de proportione nihil palam tradiderat, non dicit rectam media, ac extrema ratione secari.

[3] Prop. 14 lib. 2.

theoremata sunt, & sex aliæ problemata; istas per determinatas classes proferre debito ordine curabimus.

TERTII LIBRI THEOREMATA.

II. AD quatuor classes hujus libri theoremata commode redigantur. Ad primam nempe, quæ spectat circulorum centra; ad secundam, quæ colligit rectas ad circuli circumferentias ductas; ad tertiam, quæ sive circulos sese invicem occurrentes comprehendit, sive rectas, quæ circulum ipsum tangunt; ad quartam demum, quæ angulos sive ad centra, sive ad circumferentias circulorum constitutos, concludit.

DE CIRCULORUM CENTRIS.

III. CEntra circulorum per quatuor theoremata investigantur. I. Si in circulo recta quædam linea secet aliam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos, in secante erit centrum circuli (c). II. Si recta linea per centrum ducta, aliam rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, secabit ad angulos rectos; & si secet ad angulos rectos, secabit bifariam. Perinde infertur quoque, rectam in circulo ductam secantem aliam aut ad angulos rectos, aut bifariam, in se centrum circuli continere (1). III. In circulo si duæ rectæ lineæ sese in centro non secent, utraque bifariam non secabitur (3). IV. Si e puncto intra circulum sumto, cadant ad ejus circumferentiam plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, assumtum punctum erit centrum circuli (4).

DE RECTIS AD CIRCULI CIRCUMFERENTIAM DUCTIS.

IV. CIrca rectas ad circuli circumferentiam ductas sex ab Euclide demonstrantur theoremata, nimirum: I. Si in circuli circumferentia duo puncta sumantur, quæ puncta ista conjungit recta linea, tota intra circulum cadet (5). II. Si in circuli diametro capiatur punctum aliquod, quod non sit centrum, & ex eo ducantur ad circum-

(1) Comit [illegible] lib. 3 Propositiones cunctas hujus tertii elementi ab Euclide acceptas fecimus [illegible].

[c] Prop. 1. lib. 3. Ex hoc theoremate Euclides lateritur indicat, cum in circulo recta una aliam non ductam per centrum secaverit, tunc ea recta, & rectam secantem transire per circuli centrum, & aliam secare & bifariam, & ad angulos rectos: quorum uno dato, aliud evincitur.

[3] Prop. 4. lib. 3.

[4] Prop. 9. lib. 3.

[5] Prop. 2. lib. 3. qua indicat quoque Euclides, rectam quamlibet circulum tangentem in unico tantum puncto perfectie occurrere alioquin caderet intra circulum, & non esset tangens, sed secans.

cumferentiam plures aliæ rectæ lineæ, earum omnium maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum, minima vero reliqua portio diametri: aliarum autem, quæ maxime propinquiores sunt, majores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto non nisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (1). III. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ex quo ducantur plures rectæ lineæ cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam, earum utique, quæ pertingunt ad concavam, maxima quidem erit illa, quæ transit per centrum: aliarum vero, quæ maximæ sunt propinquiores, majores erunt semper remotioribus: vicissim autem illarum, quæ pertingunt ad convexam, minima quidem erit illa, quæ producta transit per centrum: aliarum vero, quæ minimæ sunt propinquiores, minores erunt semper remotioribus: & ab illo eodem puncto, cum ad concavam, tum ad convexam circuli circumferentiam nonnisi duæ rectæ lineæ æquales duci poterunt (2). IV. In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter a centro distant: & quæ æqualiter a centro distant inter se sunt æquales (3). V. In circulo maxima linearum in ipso ductarum est diameter, seu quæ transit per centrum: aliarum autem, quæ centro sunt propinquiores, majores semper erunt remotioribus (4). VI. Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, erit rectangulum sub segmentis unius æquale rectangulo sub segmentis alterius. Quæ proprietas obtinet etiam, si duæ rectæ in circulo ductæ sibi invicem extra circulum occurrant (5).

DE CIRCULIS SIBI INVICEM OCCURRENTIBUS, ET DE RECTIS CIRCULUM AUT TANGENTIBUS, AUT SECANTIBUS.

V. QUoad circulos sibi invicem occurrentes sex alia extant apud Euclidem theoremata. I. Circuli, qui se mutuo secant, non possunt unum idemque centrum habere (6). II. Circuli, qui sese intus contingant, non possunt unum idemque centrum habere (7). III. Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat (8). IV. Si duo circuli sese intus contingant, recta conjungens centra ipsorum transibit per punctum contactus (9). V. Si duo circuli sese extra contingant, recta conjungens centra ipsorum, transibit per punctum contactus (10). VI. Circulus circulum in pluribus, quam

[1] Prop. 7. lib. 3. Ex hac propositione colligitur solum ex centro duci posse ad circumferentiam rectas omnes æquales, non ex alio quovis puncto non nisi duas æquales duceotur.
[2] Prop. 8. lib. 3.
[3] Prop. 14. lib. 3.
[4] Prop. 15. lib. 3.
[5] Prop. 35. lib. 3.
[6] Prop. 5. lib. 3.
[7] Prop. 6. lib. 3.
[8] Prop. 10. lib. 3.
[9] Prop. 11. lib. 3.
[10] Prop. 12. lib. 3.

quam in uno puncto non contingit sive intra, sive extra eum contingat (1).

VI. Quoad rectas circulum tangentes tria solum demonstrantur theoremata. I. Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eum erigatur, haec tota cadit extra circulum, & in locum ipsu, & circuli circumferentia contentum, nulla alia recta linea duci potest. Periode facile ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datum, si ea tali puncto ducatur diameter ad circulum, & ex eodem puncto erigatur perpendicularis ad diametrum (2). II. Si circulum recta contingat linea, quae centrum cum puncto contactus conjungit, perpendicularis erit ad tangentem (3). III. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus perpendicularis ad tangentem erigatur, haec transibit per centrum circuli (4).

VII. Tandem quoad rectas, quae ex eodem puncto ductae circulum, & tangunt, & secant, theoremata duo sunt. I. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duae rectae lineae, quarum una circulum contingat, altera eundem utcumque secet, rectangulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum, aequale erit quadrato, quod fit ex tangente (5). II. Si extra circulum sumatur punctum aliquod, & ex eo ducantur duae rectae lineae, quarum una circulum secet, altera incidat in eum, sitque rectangulum

(1) Prop. 3 lib. 3.

(2) Prop. 16 lib. 3. Per hoc theorema tres quoque Euclides docet & rectam lineam, quae ab extremitate diametri ducitur, circulum contingere, illamque tangere in uno tantum puncto, alias intra ipsum caderet: & angulum contactus, hoc est a tangente, & circuli peripheria contentum, minorem esse quocumque angulo rectilineo acuto, & angulum semicirculi, hoc est diametro, & circuli peripheria comprehensum, quocumque angulo acuto rectilineo esse majorem, atque in locum tangentis & circuli circumferentia contentum, nullam aliam rectam ex puncto contactus duci posse.

Neque mirandum, angulum contactus nulla prorsus quantitate gaudere; quia etsi tam minor sit quocumque angulo acuto, ut per nullam rectam secari possit, potest tamen augeri & esse etiam inaequalis per rectam lineam infinitesimum angulum ordinis primi capientem, minui tamen potest per alias rectas dividentes hunc angulum infinitesimum, nempe per alterum circuli circumferentiam descriptum per punctum contactus, & majore intervallo, quam sit circuli centrum; atqui omnis quantitatis apud Mathematicos id omne intelligitur, quod plus minusque suscipiens, quocumque modo augeri potest, aut minui.

(3) Prop. 18. lib. 3.

(4) Prop. 19. lib. 3. ex quo colligitur, si intra circulum aliqua ponatur recta, atque ex uno ejus extremo alia extra circulum ducatur, tria evenire posse. I. Rectam lineam intra circulum positam esse diametrum, seu per centrum transire. II. Ductam extra centrum esse tangentem. III. Unam alteri ad angulos rectos insistere, quorum si duo contingerint, tertium necessario eveniat.

(5) Prop. 36. lib. 3. Hoc theorema duo nos docet. I. Si ab eodem extra circulum puncto quotvis ducantur secantes, omnia rectangula inter se aequalia esse, singula quadrato tangentis aequari. II. Quae ex eodem puncto circulum tangunt aequales esse: earumque pariter quadrata singula eidem aequantur quadrato ex Commandino.

gulum sub secante tota, & portione extra circulum existente contentum æquale quadrato incidentis, incidens illa recta linea tangens erit (1).

DE ANGULIS SIVE AD CENTRA, SIVE AD CIRCUMFERENTIAS CIRCULORUM CONSTITUTIS, ET DE CIRCULORUM PORTIONIBUS.

VIII. Quæ exponunt affectiones angulorum, qui sive ad centra, sive ad circumferentias circulorum consistunt, theoremata septem numerantur, nimirum. I. Angulus ad centrum duplus est anguli ad circumferentiam, cum super eodem arcu insistunt (2). II. Qui in eadem portione sunt anguli, inter se sunt æquales (3). III. Quadrilaterorum in circulo inscriptorum anguli oppositi duobus rectis sunt æquales (4). IV. In circulis æqualibus æquales anguli, æqualibus arcubus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias sint positi (5). V. In circulis æqualibus anguli, qui sive ad centra, sive ad circumferentias positi, æqualibus arcubus insistunt, sunt etiam æquales inter se (6). VI. Angulus in semicirculo rectus est: qui vero est in portione majore est recto minor: & qui in portione minore est recto major (7). VII. Si circulum recta contingat linea, & ex puncto contactus alia utcumque circulum secans ducatur, anguli sub tangente & secante contenti, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus constituuntur (8).

IX. Theoremata tandem, quæ ad circulorum portiones attinent hæc quatuor sunt. I. In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales constitui non possunt ad easdem partes (9). II. In æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones constitutæ, sunt etiam æquales (10). III. In circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ, æquales arcus abscindunt: majorem quidem æqualem majori, minorem vero minori (11). IV. In circulis æqualibus æquales arcus æquales rectæ lineæ subtendunt. Hæc propositio præcedentem convertit (12).

TER-

[1] Prop. 37. lib. 3. quæ convertit propositionem, & ex ea evincitur quoque, quæ ex eodem puncto ad circulum ducuntur rectæ, æquales esse tangentes.
[2] Prop. 20. lib. 3.
[3] Prop. 21. lib. 3.
[4] Prop. 22. lib. 3.
[5] Prop. 26. lib. 3. Quod in hoc theoremate de æqualibus circulis demonstrat Euclides, multo fortius de uno eodemque circulo evincitur.
[6] Prop. 27. lib. 3. Quæ conversa est præcedentis, & eadem demonstratio erit, si anguli æqualibus circumferentiis ejusdem circuli insistant.
[7] Prop. 31. lib. 3.
[8] Prop. 32. lib. 3.
[9] Prop. 23. lib. 3.
[10] Prop. 24. lib. 3.
[11] Prop. 28. lib. 3.
[12] Prop. 29. lib. 3. quæ est præcedentis conversa.

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

X. PRaxes & constructiones circulorum, quas Euclides in hoc tertio libro exponit aut circulum ipsum spectant, aut ea quæ circulo adveniunt, quare trifariam dirimuntur & in ea, quæ ad circulum quoad se inspectum attinent & in ea, quæ ad tangentem & in ea tandem, quæ ad angulos in circuli portione constitutos.

XI Primæ classis duo sunt. I. Dati circuli centrum invenire (1). II. Circuli portione data, invenire centrum circuli, cujus ea est portio, & circulum perficere (2). III Datam circuli portionem bifariam dividere (3).

XII Secundæ vero classis unum tantum extat problema nimirum, Ex dato extra circulum puncto tangentem ad circulum ducere (4).

XIII Tertiæ tandem classis etiam duo sunt. I In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (5). II. Ex dato circulo abscindere portionem, quæ suscipiat angulum æqualem angulo dato (6).

EX QUARTO ELEMENTORUM LIBRO PROBLEMATA.

XIV. PEr sexdecim propositiones edisserit Euclides in quarto libro de inscriptione, & circumscriptione cum figurarum regularium in circulo, tum circuli in figuris regularibus. Figuræ autem regulares, quas potissime exponit sunt triangulum, quadratum, pentagonum, hexagonum, & quindecagonum (7) Omnes hujus elementi propositiones sunt problemata numero sexdecim: quatuor quatuor respiciunt triangulum, quatuor quadratum, totidem pentagonum, una hexagonum, altera quindecagonum, & duæ tantum sunt lemmata, perinde juxta hasce tres

D clas-

[1] Prop. 1. lib. 3. Ex hoc problemate est perspicuum, si in circulo recta quædam linea rectam aliam quandam bifariam secabit, & ad angulos rectos, in secante circuli centrum inesse.
[2] Prop. 25 lib. 3.
[3] Prop. 30. lib. 3.
[4] Prop. 17 lib. 3.
[5] Prop. 33 lib. 3.
[6] Prop. 34. lib. 3.
[7] Esto vero sit, & multiformis circumscriptionum, & inscriptionum figurarum contemplatio, Euclides tamen non multum admodum progressus est; pervenit namque ad hexagonum, & postremo quindecagoni angulos [illegible] [qui astrorum [illegible] magis spectat] finem dicendi facit; [illegible] quod alii, non fuerit rimatus, sed quod nullo [illegible] censuit quærere, ut Federicus Commandinus animadvertit.

classes præfata problemata exponemus (1). At prius lemmata, utpote simpliciora dabimus.

II. Lemmata duo sunt nempe. I. In dato circulo aptare rectam lineam, quæ alteri datæ sit æqualis: oportet autem, ut data recta linea non sit major diametro dati circuli (2). II. Æquicrure triangulum constituere, cujus uterque angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis (3).

III. Et quidem circa figuras trilateras, sive triangula, quatuor proferuntur problemata, suntque sequentia. I. In dato circulo describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (4). II. Circa datum circulum describere triangulum æquiangulum alteri triangulo dato (5). III. In dato triangulo circulum describere (6). IV. Circa datum triangulum circulum describere (7).

IV. Circa vero figuras quadrilateras hæc quatuor alia extant problemata. I. In dato circulo quadratum describere (8). II. Circa datum circulum quadratum describere (9). III. In dato quadrato circulum describere. (10) IV. Circa datum quadratum circulum describere (11).

V. Ad multilateras tandem figuras spectant sex reliquæ propositiones, quarum quatuor ad pentagonum attinent, una ad hexagonum, & altera ad quindecagonum. Igitur I. In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere (12). II. Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere (13). III. In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere (14). IV. Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere (15). V. In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere (16). VI. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, &

[1] Omnes hujus elementi propositiones, ut inquit Gulielmus Whistonius, Trigonometriæ magis inserviunt: earum namque ope figurarum, & corporum magnitudines, & varios aliorum adspectus, & circuli quadraturam, & circulorum duplicatam continent, & non pauca alia non ab re perscrutantur.

[2] Prop. 1 lib. 4. Hæc, omnesque aliæ quarti libri propositiones Euclidi adscribuntur, demto fortasse quartum illa, quæ ad triangulum spectant, quæ teste Andrea Tacquetto, Thaleti Milesio debentur; quarum inventione lætitia elatus bovem immolasse dicitur.

[3] Prop. 10. lib. 4.

[4] Prop. 2. lib. 4.

[5] Prop. 3 lib. 4.

[6] Prop. 4. lib. 4.

[7] Prop. 5. lib. 4.

[8] Prop. 6 lib. 4.

[9] Prop. 7 lib. 4.

[10] Prop. 8. lib. 4.

[11] Prop. 9. lib. 4.

[12] Prop. 11 lib. 4.

[13] Prop. 12 lib. 4.

[14] Prop. 13 lib. 4.

[15] Prop. 14. lib. 4.

[16] Prop. 15. lib. 4. Post hoc problema Euclides tria alia pro suo doctrinæ ordine adducere debuerat, alterum de descriptione hexagoni circa datum circulum; alterum de descriptione circuli in dato hexagono, alterum tandem de descriptione circuli circa datum hexagonum, atque alia de circumscriptione quindecagoni circa circulum, & vicissim; at hæc facilius, & nullius negotii aliorum studio commisit.

& æquiangulum describere (1).

EX QUINTO ELEMENTORUM LIBRO THEOREMATA.

I. UTilem, necessariamque proportionum doctrinam generatim respectant (2) per vigintiquinque propositiones exponit Euclides in hoc quinto libro (3) suntque omnes theoremata, quæ Eudoxius quidam, qui Platonis magister fuit, adinvenit, & Euclides solum collegit, ut ait Eudemus, Proclus, Commandinus, aliique, per hæc magnitudines generatim inter se comparatas considerat, earumque analogiam perscrutatur. Quoniam autem Euclides cum omnibus Veteribus proportionem ipsam ope multiplicium demonstrat propterea omnia theoremata hujus elementi in tres classes commode digeruntur; partim enim respiciunt quantitates æquemultiplices, partim quantitates proportionales, partim demum mutationes, quæ fiunt per terminos proportionales, quas argumentandi modos e proportione petitos appellant.

DE QUANTITATIBUS ÆQUEMULTIPLICIBUS.

II. SEx sunt, quæ quantitates æquemultiplices spectant, theoremata nimirum. I Si fuerint quotcumque magnitudines, quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æquemultiplices, quotuplex est una unius, totuplices erunt & omnes omnium (4). II Si prima secundæ tam multiplex fuerit, quam tertia

D 2 quar-

[1] Prop. 16. lib. 4.
[2] Totum hoc quintum planorum elementum commune est Geometriæ, Arithmeticæ, Musicæ, Astronomiæ, Staticæ, & omni simpliciter Mathesi disciplinæ, quæ enim in ipso demonstrantur theoremata, non solum Geometriæ inserviunt, verum ad ceterarum omnium usus, & contemplationes referuntur, quippe quæ proportionibus inter se connexis fere omnia nituntur, & modos de proportionalibus ratiocinandi e libro hoc mutuari solent, speciatim vero Geodesia, seu practica Geometria, quæ linearum, figurarum, atque corporum mensuras, quas complectitur, e proportionum doctrina plerumque hauriri, & Arithmetica, cujus omnes propositiones, etiam sublatis septimo, octavo, nono, & decimo ex professo agentibus libris, ex his demonstrari commode possunt & Statica, quæ nonnisi per doctrinam proportionum corporum pondera perscrutatur. Perinde tam utilis est, & necessarium, ut si ejus doctrina de medio auferretur, nihil præclarum, aut egregium in mathesi relinqueretur.
[3] Hæ propositiones omnes hujus elementi numerum sint, Euclides tamen solum 25 collegit, atque totum, quæ v libro adjecta reperiuntur, a Campano, Theone, aliisque fuerunt addita.
[4] Prop. 1. lib. 5.

quartæ, fuerit autem & quinta secundæ tam multiplex quam sexta quartæ, erit composita ex prima, & quinta tam multiplex secundæ quam composita ex tertia, & sexta multiplex quartæ (1). III Si prima secundæ tam multiplex fuerit, quam tertia quartæ, æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt etiam æquemultiplices secundæ, & quartæ (2) IV Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, æquemultiplices primæ, & tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eamdem quoque rationem habebunt (3) V. Si tota totius tam multiplex sit, quam ablata ablatæ, erit reliqua reliquæ tam multiplex, quam tota totius (4). VI Si duæ magnitudines æquemultiplices fuerint duarum magnitudinum, & ex iis ablatæ quædam sint earumdem æquemultiplices, erunt & reliquæ vel iisdem æquales, vel earumdem æquemultiplices (5).

DE QUANTITATIBUS PROPORTIONALIBUS, SEU DE PROPRIETATIBUS PROPORTIONIS.

III. AD quantitates proportionales duodecim ista theoremata spectant. I Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem, & eamdem ad æquales (6). II Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem, & eadem ad minorem (7). III Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, inter se sunt æquales & ad quas eadem eamdem rationem habet, etiam inter se æquales sunt (8) IV Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ majorem habet rationem, illa major est ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa est minor (9). V. Rationes, quæ eidem sunt æquales, inter se sunt etiam æquales (10). VI Si fuerint quotcumque magnitudines proportionales, erit ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes (11) VII Si prima habuerit ad secundam eamdem rationem, quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam habuerit rationem majorem, quam quinta ad sextam, & prima ad secundam majorem quoque rationem habebit, quam quinta ad sextam (12). VIII Si quatuor magnitudines pro-

[1] Prop.1.lib.5.
[2] Prop.3 lib.5.
[3] Prop.4 lib.5. Hoc theorema proprie spectat ad demonstrationem definitionis magnitudinum, quæ sunt in eadem proportione, ut est, quando æquemultiplices primæ, & tertiæ, videlicet antecedentium, æque æquemultiplices secundæ, & quartæ, hoc est, consequentium, vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, hic enim demonstrat, & ipsas inter se eamdem habere proportionem, ut habet Commandinus.

[4] Prop.5 lib.5.
[5] Prop.6 lib.5.
[6] Prop.7 lib.5.
[7] Prop.8 lib.5.
[8] Prop.9 lib.5.
[9] Prop.10 lib.5.
[10] Prop.11 lib.5.
[11] Prop.12 lib.5.
[12] Prop.13 lib.5.

proportionales fuerint, prima, & secunda erunt, uel una æquales, vel una majores, vel una minores tertia, & quarta. Hoc theorema lemma est sextidecimi theorematis (1). IX. Partes cum suis multiplicibus comparatæ eamdem cum iis servant rationem (2). X. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam, erit & reliqua ad reliquam, ut tota ad totam (3). XI. Si prima ad secundam habuerit eamdem rationem, quam tertia ad quartam, fuerit autem ut quinta ad secundam, ita sexta ad quartam, erit composita ex prima, & quinta ad secundam, ut composita ex tertia, & sexta ad quartam (4). XII. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima ipsarum simul reliquis duabus majores erunt (5).

DE ARGUMENTANDI MODIS E PROPORTIONE PETITIS.

IV. Modos argumentandi, qui ex proportione eruuntur sequentia novem ostendunt theoremata. I. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & invertendo etiam proportionales erunt (6). II. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutando etiam proportionales erunt (7). III. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & dividendo etiam proportionales erunt (8). IV. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & componendo etiam proportionales erunt (9). V. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & convertendo etiam proportiones erunt (10). VI. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis totidem, primæ ipsarum erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Hoc theorema est lemma vigesimi secundi (11). VII. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum quoque erunt vel una æquales, vel una majores, vel una minores ultimis earumdem. Theorema istud est lemma vigesimi tertii (12). VIII. Si tres magnitudines fuerint in ordinata ratione cum aliis tribus magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (13). IX. Si tres magnitudines fuerint in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, primæ ipsarum ad ultimas ex æquali in eadem ratione erunt (14).

(1) Prop. 24. lib. 5.
(2) Prop. 15. lib. 5.
(3) Prop. 19. lib. 5.
(4) Prop. 24. lib. 5.
(5) Prop. 25. lib. 5.
(6) Coroll. prop. 4.
(7) Prop. 16. lib. 5.
(8) Prop. 17. lib. 5.
(9) Prop. 18. lib. 5.
(10) Coroll. Prop. 19.
(11) Prop. 20. lib. 5.
(12) Prop. 21. lib. 5.
(13) Prop. 22. lib. 5.
(14) Prop. 23. lib. 5.

EX SEXTO ELEMENTORUM LIBRO.

I. Quam in quinto libro universim de omni magnitudine exposuit proportionis doctrinam Euclides, variis peculiaribus usibus planarum figurarum applicare contendit in hoc sexto libro; quare proportiones, quae in quibusvis figuris planis occurrere possunt, demonstrare conatur (1). Triginta tribus propositionibus, quarum tres, & viginti sunt theoremata, & decem problemata, totum suum complet intentum: quae omnia per certas classes sic proferre curabimus.

THEOREMATA SEXTI LIBRI.

II. Hujus Libri theoremata juxta varias planorum proportiones, quas exhibent, quatuor classibus facili negotio comprehenduntur: alia enim spectant lineas: alia angulos, & sectores: alia triangula: & alia demum reliquas figuras rectilineas, secundum quas classes ea hoc ordine recensebimus.

DE PROPORTIONE RECTARUM, QUIBUS FIGURÆ RECTILINEÆ CONTINENTUR, ET DE PROPORTIONE ANGULORUM, ATQUE SECTORUM.

III. Propositiones igitur, quae ad rectarum proportionem spectant, quibus figurae ipsae continentur, per haec tria theoremata exponit Euclides. I. Si fuerint quatuor rectae lineae proportionales erit rectangulum ex mediis aequale rectangulo ex extremis: & vicissim si rectangulum ex mediis aequale sit rectangulo ex extremis, quatuor rectae lineae proportionales erunt (2). II. Si sint tres rectae lineae proportionales, erit rectangulum ex extremis aequale quadrato quod describitur a media. Et vicissim, si rectangulum ex extremis aequale sit quadrato a media descripto, tres rectae lineae proportionales erunt (3). III. Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint erunt rectilinea similia, similiterque ab eis descripta etiam proportionalia, & vicissim si rectilinea proportionalia sint, ipsae rectae lineae etiam proportionales erunt (4).

IV. Ad secundam classem de angulis & sectoribus unum attinet theorema tantum. In aequalibus circulis anguli sive ad centra, sive ad car-

[1] Totum hoc sextum Elementorum Euclidis inventori vulgo adscribitur, attamen complures alii varias ejusdem propositionibus subdiderunt, omnesque Graeci Geometrae summo studio ipsi incubuerunt, ut Plato, Archytas Tarentinus, Menaechmus, Eratosthenes, Philo Byzantinus, Hero, Apollonius Pergaeus, Nicomedes, Pappus, aliique, teste Eudemo, Proclo, & Eutochio.

[2] Prop. 16. lib. 6. Hinc cujuslibet trianguli rectanguli aream ex unius lineae rectae dimensione facile dimetimur.

[3] Prop. 17 lib. 6. Hinc lineam inaccessam, cujus terminus alter est accessibilis, metiri discimus.

[4] Prop. 22. lib. 6.

circumferentiam positi, eamdem habent rationem cum arcubus, quibus insistunt, similiter autem & sectores (1).

DE PROPORTIONE, ET SIMILITUDINE TRIANGULORUM.

V. Circa propositiones tertiae classis, quae pertinent ad proportionem, atque similitudinem triangulorum duo theoremata sunt, quae versantur circa triangula in genere, nempe. I. Si uni laterum trianguli, parallela recta linea ducatur, ea secabit alia duo latera proportionaliter: & vicissim si secet proportionaliter duo latera trianguli, ea tertio lateri parallela erit (2). II. Recta, quae secat angulum verticalem alicujus trianguli bifariam, secabit basim in ratione laterum & vicissim recta, quae secat basim alicujus trianguli in ratione laterum, secabit angulum verticalem bifariam (3). Aliae theoremata demonstrant proprietates trianguli rectanguli speciatim, suntque duo sequentia. I. Si in triangulo rectangulo ex angulo recto ad basim perpendicularis demittatur, haec dividet triangulum in duo alia triangula, quae cum toti, tum inter se similia erunt (4). II. In triangulis rectangulis figura quaevis a latere rectum angulum subtendente descripta, aequalis erit binis, quae illi similes, & similiter positae, describuntur a lateribus rectum angulum continentibus (5).

VI. Per alias tandem propositiones comparantur triangula inter se sive quoad areas, sive quoad similitudines. Circa comparationes quoad areas haec tria extant theoremata. I. Triangula, & parallelogramma eamdem altitudinem habentia inter se sunt ut bases (6). II. Triangula, quae aequalia sunt, & habent unum angulum uni angulo aequalem, habent quoque latera circum aequales angulos reciproce proportionalia: & vicissim triangula, quae circum aequales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam aequalia inter se (7). III. Triangu-

la

[1] Prop. 33. lib. 6. Hinc perspicuum est etiam angulos esse ad angulum, ut sector ad sectorem.

[2] Prop. 2. lib. 6. Hoc theorema nos quoque docet, si ad omnia trianguli latera ductae fuerint plures parallelae, fore omnia laterum segmenta proportionalia.

[3] Prop. 3. lib. 6. Quod theorema indicat etiam, si recta, quae angulum trianguli bifariam secat, & bisecabit itidem basim, triangulum fore Isosceles, quia duo latera habebit aequalia, & bisecans recta erit perpendicularis basi.

[4] Prop. 8. lib. 6. Ex hoc theoremate est manifestum, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam basis partibus mediam proportionalem esse; & quodlibet latus trianguli medium esse proportionale inter basim, & unamquamque partem.

[5] Prop. 31. lib. 6. Hoc theorema universalem reddit propositionem 47 lib. 1 quae extenditur ad omnes rectilineas figuras.

[6] Prop. 1. lib. 6. Hoc est maximum theorema, a quo totum sextum dependet elementum; imo quidquid de solidis figuris sive planis, sive solidis fuit unquam demonstratum ab illo dependit.

[7] Prop. 14. lib. 6. Ex hoc, & praecedenti theoremate evincitur, tam parallelogramma, quam triangula, quae reciprocant bases, & altitudines, esse aequalia & contra.

la similia sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum (1).

VII Tandem de similitudine triangulorum hæc quinque alia extant theoremata. I. Triangula æquiangula habent latera circum æquales angulos proportionalia & homologa sunt latera illa, quæ æquales angulos subtendunt (2). II. Triangula, quæ latera habent proportionalia, erunt etiam æquiangula & æquales habebunt eos angulos, quos homologa latera subtendunt (3). III Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, & latera circum illos angulos proportionalia, sunt etiam æquiangula & æquales habent angulos illos, quos homologa latera subtendunt (4). IV. Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, latera vero circum alios angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se, hoc est utrumque vel majorem, vel minorem recto, erunt etiam æquiangula & æquales habebunt angulos illos, circa quos sunt latera proportionalia (5). V. Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus proportionalia, & composita ad eumdem angulum habeant quoque latera homologa parallela, reliqua eorum latera in directum erunt (6).

DE RELIQUIS FIGURIS RECTILINEIS.

VIII. Quæ tandem theoremata reliquas figuras rectilineas proportionales ostendunt, sunt septem, quæ sequuntur. I. Parallelogramma, quæ æqualia sunt & habent unum angulum uni angulo æqualem, habent quoque latera circum æquales angulos reciproce proportionalia & vicissim parallelogramma, quæ circum æquales angulos latera habent reciproce proportionalia, sunt etiam æqualia inter se (7). II. Polygona similia dividuntur in triangula numero æqualia similia, & homologa totis, duplicatamque habent rationem laterum homologorum (8). III. Quæ eidem rectilineo sunt similia, inter se sunt similia (9). IV. Parallelogramma æquiangula habent inter se rationem ex lateribus compositam (10). V. Parallelogramma, quæ

[1] Prop.19.lib.6.
[2] Prop.4.lib.6.
[3] Prop.5.lib.6.
[4] Prop.6.lib.6.
[5] Prop.7.lib.6. Ex hoc theoremate, & quatuor præcedentibus constat similitudinem triangulorum evinci posse, si habeant latera proportionalia, si habeant unum angulum uni angulo æqualem, & latera circum æquales angulos proportionalia, & reliquos angulos ejusdem speciei inter se.
[6] Prop.32.lib.6.

[7] Prop.14.lib.6. Ex theoremate isto pendet demonstratio regulæ inversæ, sive reciprocæ proportionum, qua ex datis tribus terminis quartum invenitur, multiplicando eos invicem duos priores, & factum dividendo per tertium, tunc habetur quartus.
[8] Prop.20.lib.6. Ex hoc theoremate invenitur methodus figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data.
[9] Prop.21.lib.6.
[10] Prop.23.lib.6.

quæ sunt circa diametrum alterius, cum toti, tum inter se similia sunt (1) VI Si ex parallelogrammo aliud auferatur, quod commu-nem cum eo angulum habens, sit eidem simile, similiterque positum, consistit cum illo circa eamdem diagonalem (2) VII Omnium parallelogrammorum, quæ ad eamdem rectam applicata, deficiunt parallelogrammis alicui dato similibus, maximum est illud, quod applicatur super dimidia (3).

SEXTI LIBRI PROBLEMATA.

IX Eodem tandem ordine sexti elementi problemata sive ad rectas, sive ad figuras proportionales constituendas spectant, suntque decem.

X. Primæ Classis sunt sex problemata. I A data recta linea optatam partem abscindere (4) II Datam rectam lineam secare in partes proportionales partibus, in quas secta est alia data recta linea (5) III Datis duabus rectis lineis tertiam proportionalem invenire (6) IV Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire (7) V Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire (8) VI Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione dividere (9).

XI Secundæ vero classis, quæ ad proportionem rectilineorum spectant, quatuor problemata sunt. I A data recta linea dato rectilineo, simile, similiterque positum rectilineum describere (10) II Rectilineum constituere quod sit simile uni dato, & æquale alteri dato (11). III Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod alteri dato sit simile: oportet autem, ut datum rectilineum non majus sit eo parallelogrammo, quod applicatum super dimidia datæ rectæ lineæ, deficit parallelogrammo, quod eidem dato sit simile (12). IV Ad datam rectam lineam dato rectilineo, æquale parallelogrammum applicare excedens parallelogrammo, quod alteri dato sit simile (13).

(1) Prop. 24 lib. 6.
(2) Prop. 26 lib. 6. Hinc motuum compositorum æstimare discimus in Whistonio in Tacquet.
[3] Prop. 27 lib. 6.
[4] Prop. 9 lib. 6.
[5] Prop. 10 lib. 6. Ex hoc problemate discimus modum, quo recta data in quotvis æquales partes secari possit.
(6) Prop. 11 lib. 6.
(7) Prop. 12 lib. 6.
(8) Prop. 13 lib. 6.
(9) Prop. 30 lib. 6. Hujus sectionis admirabilis est usus in corporum regularium inscriptione, & comparatione, ut ait Tacquet.
[10] Prop. 18. lib. 6. Hinc methodus aperitur mechanica omnia in tabulis delineandi: utrum per hoc problema figuram, quamvis irregularem, ad similes figuras exiguas redigamus.
[11] Prop. 25 lib. 6.
[12] Prop. 28 lib. 6.
[13] Prop. 29 lib. 6.